Leçon 224 - Exemples de développements asymptotiques de suites et de fonctions.

1. Développements asymptotiques de fonctions. —

Cadre : $I =]a, b[$ un intervalle, $c \in \bar{I}$, $f : I \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$.

1. Développement limité. —

- Def : Développement limité : On dit que f admet un $Dl_n(c)$ s'il exise une fonction polynômiale de $\mathbb{R}_n[X]$ et une fonction $\varepsilon : I \to \mathbb{R}$ avec $\varepsilon(x) \to_{x\to c} 0$, telles que $\forall x \in I$, $f(x) = P(x-c) + (x-c)^n \varepsilon(x)$.
  Ou, $f(x) = P(x-c) + o((x-c)^n)$ sur un voisinage de c dans I.
- Thm : Le $Dl_n(c)$ est unique.
- Ex : Fonctions polynômiales, $\frac{1}{1-x} = \sum_{k=0}^n x^k + o(x^n)$ sur un voisinage de 0.
- Thm : f est continue (ou se prolonge par continuité) en c ssi elle admet un $DL_0(c)$. f est dérivable (ou se prolonge en une fonction dérivable) en c ssi elle admet un $DL_1(c)$.
- Contre-ex : $f(x) = x^3 sin(\frac{1}{x})$ admet un $DL_2(0)$ mais est seulement prolongeable de façon C^1 en 0.
- Thm : Formule de Taylor-Young : Pour $c \in I$, si $f \in D^n$, alors elle admet un $DL_n(c)$ donné par $f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f(k)(c)}{k!}(x-c)^k + o((x-c)^n)$.
- Taylor-Intégral : Si $f \in D^{n+1}$, le $o((x-c)^n)$ du théorème précédent vaut : $\int_c^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)dt$.
- Ex : $e^x = \sum_k \frac{x^k}{k!} + o(x^n)$, $cos(x) = \sum_k \frac{(-1)^k}{(2k)!} x^{2k} + o(x^{2n})$.
- Ex : Pour $s \in \mathbb{R}$, $(1+x)^s = 1 + \sum_k \frac{s(s-1)...(s-k+1)}{k!} x^k + o(x^n)$.
- Rem : Si f est D^k, pour $n \le k$, un $DL_n(c)$ de f donne les dérivées de f en c.
- Rem : On peut effectuer un changement de variables dans le DL. Ainsi, en translatant on peut passer d'un $DL_n(c)$ à un $DL_n(0)$.
- Ex : $f(x) = cos(\sqrt{x}) = \sum_k \frac{(-1)^k}{(2k)!} x^k + o(x^n)$, donc $f^{(k)}(0) = \frac{(-1)^k}{(2k)!}$.

On ne va regarder que les DL en 0 par la suite.

2. Opérations sur les développements limités. —

- Thm : Pour f,g ayant des $DL_n(0)$, $f(x) = P(x) + o(x^n), g(x) = Q(x) + o(x^n)$, et $\lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda.f$, $f+g$, $f.g$ ont des $DL_n(0)$ dont on trouve l'expression. ($fg(x) = R(x) + o(x^n)$ où $R(X) \equiv P(X)Q(X) \bmod(X^n)$)
- Ex : $DL_n(0)$ de ch,sh.
- Thm : Pour f,g ayant des $DL_n(0)$, $f(x) = P(x) + o(x^n), g(x) = Q(x) + o(x^n)$, et $g(0) = 0$, $f \circ g(x) = R(x) + o(x^n)$ où $R(X) \equiv P(Q(X)) \bmod(X^n)$.
- Ex : $\sin(sh(x)) - sh(sin(x)) = \frac{-1}{45}x^7 + \frac{1}{1545}x^{11} + o(x^{16})$.
- Cor : Si f a un $DL_n(0)$ et $f(0) \neq 0$, en écrivant $f(x) = f(0)(1-g(x))$, on peut calculer un $DL_n(0)$ de $\frac{1}{f} = \frac{1}{f(0)}\frac{1}{1-g}$ par composition des DL de g et de $x \mapsto \frac{1}{1-x}$.
- Rem : Si f réalise un C^n-difféomorphisme, on peut aussi calculer un $DL_n(0)$ de f^{-1} car $f^{-1} \circ f(x) = x = x + o(x^n)$. On cherche donc à calculer les coeffs de P tel que $P(Q(X)) \equiv X \bmod(X^n)$, pour $f(x) = Q(x) + o(x^n)$
- Ex : $f(x) = x + ln(1+x)$ est un C^∞-difféom de $]-1, +\infty[\to \mathbb{R}$ et $f^{-1}(x) = \frac{x}{2} + \frac{x^2}{16} - \frac{x^3}{192} + o(x^3)$

3. Développement asymptotique. —

- Def : On appelle échelle de comparaison au voisinage de c un ensemble E de fonctions défininies sur un voisinage de c ($c \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$) telles que :
  1) $\forall \varphi \in E$, $\forall V$ voisinage de c, $\exists x \in V - \{c\}$ tq $\varphi(x) \neq 0$.
  2) $\forall \varphi, \psi \in E$, $\varphi \neq \psi \Rightarrow \varphi = o(\psi)$ ou $\psi = o(\varphi)$.
- Ex : $((x-c)^n)_{n\ge0}$, $((x-c)^n)_{n\in\mathbb{Z}}$, en c
  $(x^\alpha.ln(x)^\beta)_{\alpha,\beta\in\mathbb{R}}$ en $+\infty$.
- Def : On dit que f admet un développement asymptotique au voisinage de c relativement à E si sur un voisinage épointé de c on a une écriture de la forme $f(x) = \sum_k a_k\varphi_k(x) + o(\varphi_n(x))$, pour un $n \ge 0$, avec $a_k \in \mathbb{R}$ et $\varphi_k \in E$ tq $\varphi_{k+1} = o(\varphi_k)$.
- Ex : $E = ((x^n)_{n\ge0})$. Un $DA_n(0)$ relativement à E est un $DL_n(0)$.
- Thm : Si f admet un $DA_n(c)$ relativement à E, il est unique.
- Ex : $x^{1/x} = 1 + \frac{log(x)}{x} + \frac{1}{2}(\frac{log(x)}{x})^2 + o(\frac{ln(x)}{x}))$ au voisinage de $+\infty$.
- Pro : Méthode pour les fonctions définies implicitement.
- Ex : $y^5 + y = x$ au voisinage de $+\infty$.

2. Développements asymptotiques et intégration. —

1. Intégration et dérivation de DL. —

- Thm : Soit f C^1 sur un voisinage de 0. Si f' admet un $DL_n(0)$ avec $f'(x) = \sum_k a_k x^k + o(x^n)$, alors f admet un $DL_{n+1}(0)$ avec $f(x) = f(0) + \sum_k \frac{a_k}{k+1}x^{k+1} + o(x^{n+1})$.
- Ex : $ln(1+x)$, $arctan(x)$
- Thm : Si f est C^1 sur un voisinage de 0 et si $f(x) = P(x) + o(x^n)$ et $f'(x) = Q(x) + o(x^{n-1})$, alors Q=P'.
- Ex : $\frac{1}{(1-x)^p} = \sum_k \binom{p+k-1}{p-1} x^k + o(x^n)$.
- Contre-ex : $f(x) = x^3 sin(\frac{1}{x})$. $f(x) = 0 + o(x^2)$, mais $f'(x) = x(2xsin(\frac{1}{x}) - cos(\frac{1}{x})) \neq 0 + o(x)$, car f' n'est pas C^1 en 0.
- App : Stabilité de l'équilibre d'une EDO : Pour $f \in C^1(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^d)$, on considère $y' = f(y(t))$, $t \in \mathbb{R}$. Soit $y_0 \in \mathbb{R}^d$ un équilibre ($f(y_0) = 0$ donc $y(t) = y_0$ est une solution).
  Si y_0 est asymptotiquement stable pour le système linéarisé $y'(t) = Df_{y_0}(y(t) - y_0)$, alors il l'est pour $y' = f(y(t))$.

2. Sommation des relations de comparaison. —

- Thm : Soient $f, g : [a, b[\to \mathbb{R}$, $g > 0$, continues par morceaux.
  i) Si $\int_a^b g(t)dt$ diverge et si $f = o_b(g)$, alors $\int_a^x f(t)dt = o_b(\int_a^x g(t)dt)$.
  ii) Si $\int_a^b g(t)dt$ converge et si $f = o_b(g)$, alors $\int_x^b f(t)ft = o_b(\int_x^b g(t)dt)$.
- Rem : On a des résultats analogues pour O_b et $\sim_b$.
- Ex : On retrouve $ln(x) = o_{+\infty}(x^s)$, $\forall s > 0$.
  $arccos(x) = \sqrt{2}\sqrt{1-x} + \frac{1}{6\sqrt{2}}(1-x)^{\frac{3}{2}} + o_1((1-x)^3)$
- Contre-ex : Si $s > 1$, $\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^s}$ converge, et $\forall b > s$, $\frac{1}{t^b} = o_{+\infty}(\frac{1}{t^s})$, mais $(\int_1^x \frac{dt}{t^b})(\int_1^x \frac{dt}{t^s})^{-1} \nrightarrow 0$.
- Ex : $DA_n(+\infty)$ de $L_i(x) = \int_2^x \frac{dt}{ln(t)}$
- Ex : $DA_n(0)$ de $\int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t}dt$

3. Etudes d'intégrales à paramètres. —

- Thm : Méthode de Laplace
- Cor : Formule de Stirling : $\Gamma(t+1) = \int_0^{+\infty} e^{-t}x^t dt \sim_{+\infty} \sqrt{2\pi t}(\frac{t}{e})^t$.
- Ex pour la Méthode de Laplace.
- Méthode de la phase stationnaire
- Appli : Fonction d'Airy

3. Développements asymptotiques de suites et de séries. —

1. Suites récurrentes. —

- Def : Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \to \mathbb{R}$ tq $f(I) \subset I$. On appelle suite récurrente une suite vérifiant $u_0 \in I$ et $u_{n+1} = f(u_n)$.
- Théorème du point fixe de Picard : Pour F un fermé de $\mathbb{R}$ et $f : F \to F$ qui est k-Lipschitzienne, $k < 1$, f admet un unique point fixe s dans F et toute suite récurrente $u_{n+1} = f(u_n)$ converge vers s.
  On a même : $|u_{n+1} - s| \leq k|u_n - s| \leq k^{n+1}|u_0 - s|$. (vitesse de convergence linéaire)
- Def+Pro : On dit que u_n converge quadratiquement vers s ssi il existe $0 < M < min(1, \frac{1}{|u_0 - s|})$ tel que $|u_{n+1} - s| \leq M.|u_n - s|^2$.
  On a alors $|u_n - s| \leq \frac{M^{2^{n+1}}}{M}.|u_0 - s|^{2^n} \leq M^{2^n}\frac{(M|u_0-s|)^{2^n}}{M}$.
- **Dev** : Méthode de Newton polynomiale : Pour P un polynôme réel à racines réelles simples $\lambda_1 < \cdots < \lambda_r$, la fonction $\Phi : x \in [\lambda_r, +\infty[\mapsto x - \frac{P(x)}{P'(x)} \in [\lambda_r, +\infty[$ est bien définie.
  Pour tout $x_0 \in [\lambda_r, +\infty[$, la suite récurrente définie par $x_{n+1} = \Phi(x_n)$ converge linéairement vers λ_r et quadratiquement àpcr, avec $x_{n+1} - \lambda_r \sim \frac{1}{2}\frac{P''(\lambda_r)}{P'(\lambda_r)}(x_n - a)^2$.
- App : Cela permet d'approcher rapidement des zéros de polynômes comme $x^n - a$ pour calculer des racines n-ièmes de réels ou d'entiers.
  Si P est un polynôme à coefficients rationnels, alors $x_n \in \mathbb{Q}$.
- Pro : Méthode des petits pas
- Ex :
- Pro : Méthode d'accélération
- Ex :

2. Suites définies implicitement. —

- Ex : Soit x_n la solution dans $]n\pi, \pi(n+\frac{1}{2})[$ de $tan(x) = x$. Alors on a $x_n = n\pi + \frac{\pi}{2} - \frac{1}{n\pi} + o(\frac{1}{n})$
- Ex : Soit x_n la solution de $x^n - nx + 1 = 0$ dans $]0, 1[$. Alors $x_n \sim \frac{1}{n}$.
- Ex : Soit x_n la solution de $x^n - x - n = 0$ dans $]1, +\infty[$. Alors $x_n = 1 + \frac{log(n)}{n} + o(\frac{log(n)}{n})$.
- Ex : Soit x_n l'extremum de $\frac{cos(x)}{x}$ dans $[\pi(n-\frac{1}{2}, n\pi]$. Alors $x_n = n\pi - \frac{1}{n\pi} + o(\frac{1}{n})$ et $f(x_n) \sim \frac{(-1)^n}{n\pi}$.
- Ex : Soit x_n la solution de $tan(x) - th(x) = 0$ dans $]n\pi, \pi(n+\frac{1}{4})[$. Alors $x_n = n\pi - \frac{\pi}{4} - e^{-\pi/2}e^{-2n\pi} + o(e^{-2n\pi})$

3. Séries numériques. —

- Thm : Encadrement intégral de $\sum_k f(k)$ pour $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ décroissante.
- Thm : Soient $\sum_n u_n$ et $\sum_n v_n$ deux séries à termes positifs, avec $u_n \sim v_n$.
  1) Si $\sum_n u_n$ converge, alors $\sum_n v_n$ aussi et $\sum_{k \geq n} u_k \sim \sum_{k \geq n} v_k$.
  2) Si $\sum_n u_n$ diverge, alors $\sum_n v_n$ aussi et $\sum_{k \leq n} u_k \sim \sum_{k \leq n} v_k$.
- App : Le développement asymptotique de $H_n = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}$ est $H_n = \log(n) + \gamma + \frac{1}{2n} + o(\frac{1}{2n})$, où $\gamma = \lim((H_n - \log(n))_n)$.
- Rem : On a les mêmes résultats pour $u_n = O(v_n)$ et $u_n = o(v_n)$.
- App : Série de Bertrand
- **Dev** : Ordre moyen de Φ et σ : Un ordre moyen de $\sigma(n) = \sum d|nd$ est $x \mapsto \frac{\pi^2}{6}x$, et $\sum_{n \leq x} \sigma_n = \frac{\pi^2}{12}x^2 + O(xlog(x))$.
  Un ordre moyen de l'indicatrice d'Euler Φ est $x \mapsto \frac{6}{\pi^2}x$, et $\sum_{n \leq x} \sigma_n = \frac{3}{\pi^2}x^2 + O(xlog(x))$.
- Thm : Roabe-Duhamel : Si $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{1}{1 + \frac{a}{n} + O(\frac{1}{n^2})}$ alors $u_n \sim \frac{\lambda}{n^a}$ pour un $\lambda \in \mathbb{R}$. Donc $\sum_n u_n$ converge ssi $a > 1$.
- App : La série de terme général $u_n = \frac{2.4...(2n-2)}{3.5...(2n-1)}$ est divergente.

Références

Rombaldi : DL, DA. Méthode d'intégration/dérivation des équivalents. Méthode des petits pas. Exos sur les suites implicites.
Gourdon : Sommation des relations de comparaison. Exemple du logarithme intégral. o,O,$\sim$ de suites. Formule de Stirling. Série de Bertrand, série harmonique. Exemples.
Rouvière : Méthode de Laplace+applications. Suites récurrentes. Méthode de Newton Polynomiale (Dev)
Tenenbaum : Ordre moyen de Phi et sigma (Dev)
Amrani : Méthode d'accélération+exemples.
Zuily,Queffélec : Méthode de la phase stationnaire, fonction d'Airy.

Dieudonné : Equivalent d'une primitive.
Hauchecorne : Contre-Exemples d'équivalents asymptotiques.

June 10, 2017

Vidal Agniel, *École normale supérieure de Rennes*